

Analyse par Intervalles pour la Détection Garantie de Points Singuliers Spécifiques de Robots

Romain BENOIT

23 juin 2014

Encadrement de ma thèse et co-auteurs :

Directeur de thèse : Philippe WENGER

Co-encadrants : Nicolas DELANOUE, Sébastien LAGRANGE

- 1 Contexte robotique : Classification de robots
 - Classification de Robots par leurs fonctions cinématiques
 - Equivalence et Invariants
 - L'importance des points singuliers
 - Modèles robotiques étudiés
- 2 Analyse par intervalles
- 3 Cadre mathématique
- 4 Implémentation
- 5 Conclusions – Perspectives

Robot série \leftrightarrow fonction cinématique

Définition (Robot série)

Robot avec une seule chaîne cinématique : $S_0 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow S_n$

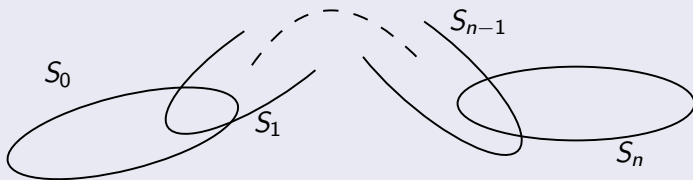


Figure: Chaîne cinématique d'un robot série

Définition (fonction cinématique d'un robot)

Une application f telle que $f : A \ni \rho \mapsto p \in T$ où :

A est l'espace articulaire du robot

T est l'espace de travail du robot

$f(\rho)$ = coordonnées induites de l'organe terminal

\Rightarrow *fonction cinématique \leftrightarrow comportement du robot*

Invariants d'applications équivalentes

Définition (Equivalence considérée)

$f \in C^\infty(X, Y)$ et $g \in C^\infty(V, W)$ sont équivalentes (noté $f \sim g$) si $\exists (h : V \rightarrow X, k : Y \rightarrow W)$, difféomorphismes tels que $g = k \circ f \circ h$

Remarque

Les comportements cinématiques de deux robots série, dont les fonctions cinématiques associées sont équivalentes pour \sim , sont reliés par des changements de variables difféomorphes.

Définition (invariant)

$I(f)$ est invariant pour l'équivalence \sim si $f \sim g \Rightarrow I(f) = I(g)$

Définition (Lieu singulier)

Soit $f : X \rightarrow Y$ Alors $S_f = \{x \in X \mid \det(Jf(x)) = 0\}$

Proposition

$f \sim g \Rightarrow$

- S_g et S_f sont homéomorphes \Rightarrow Topologie invariante*
- $g(S_g)$ et $f(S_f)$ sont homéomorphes \Rightarrow Topologie invariante*
- Ces homéomorphismes sont compatibles avec f et g*

Notion de posture

Soit un robot \mathbf{R} de fonction cinématique $f : A \rightarrow T$

Définition (Posture)

L'ensemble des postures possibles, de $p \in T$ est $\{\rho \in A \mid f(\rho) = p\}$.

Définition (Trajectoire)

$Tr : \mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \mapsto (\rho_t, p_t)$, continue, $\forall t \in [a, b], p_t = f(\rho_t)$

Définition (Changement de posture)

A lieu lorsqu'une trajectoire $(\rho_t, p_t)_{t \in [a, b]}$ vérifie :

$\exists (t_1, t_2) \in [a, b]^2$ tel que $t_1 \neq t_2, p_{t_1} = p_{t_2}$ et $\rho_{t_1} \neq \rho_{t_2}$

Inversion de fonction cinématique

Proposition

Isoler $A' \subseteq A$ tel que $\forall p \in T, \#\{\rho \in A' | f(\rho) = p\} \leq 1$ est nécessaire pour définir, localement, sur A' un inverse à f et concevoir directement des trajectoires de \mathbf{R} dans T .

Assertion fausse

Un changement de posture ne peut se produire que si la trajectoire traverse le lieu singulier du robot.

Modèles robotiques étudiés : Robots 3R

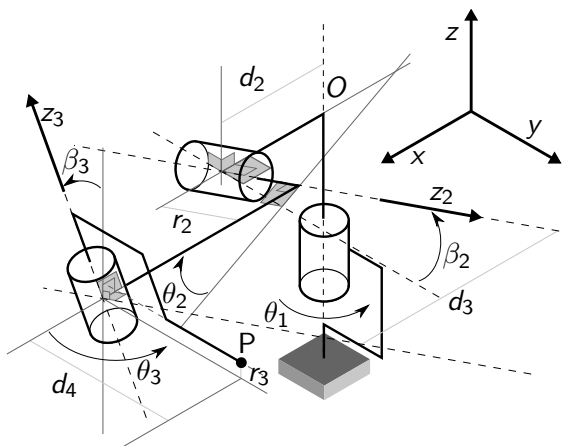


Figure: Schéma cinématique d'un robot 3R général avec $\theta_1 = 0$.

Une 1^{ère} Classification de robots 3R orthogonaux

- Manipulateurs 3R orthogonaux avec $r_3 = 0$ ($\beta_2 = \beta_3 = 0$)

Une 1^{ère} Classification de robots 3R orthogonaux

- Manipulateurs 3R orthogonaux avec $r_3 = 0$ ($\beta_2 = \beta_3 = 0$)
- Expression de la fonction cinématique du robot,
 $f : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mapsto (x(\theta_1, \theta_2, \theta_3), y(\theta_1, \theta_2, \theta_3), z(\theta_1, \theta_2, \theta_3))$

Une 1^{ère} Classification de robots 3R orthogonaux

- Manipulateurs 3R orthogonaux avec $r_3 = 0$ ($\beta_2 = \beta_3 = 0$)
- Expression de la fonction cinématique du robot,
 $f : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mapsto (x(\theta_1, \theta_2, \theta_3), y(\theta_1, \theta_2, \theta_3), z(\theta_1, \theta_2, \theta_3))$
- Calcul de la matrice jacobienne de f , Jf : indépendante de θ_1
 \Rightarrow les singularités de f sont indépendantes de θ_1
- On convertit f en $F = (\rho(\theta_2, \theta_3), z(\theta_2, \theta_3))$ en posant :
 $\rho(\theta_2, \theta_3) = x(0, \theta_2, \theta_3)^2 + y(0, \theta_2, \theta_3)^2$; $z(\theta_2, \theta_3) = z(0, \theta_2, \theta_3)$

Une 1^{ère} Classification de robots 3R orthogonaux

- Manipulateurs 3R orthogonaux avec $r_3 = 0$ ($\beta_2 = \beta_3 = 0$)
- Expression de la fonction cinématique du robot,
 $f : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mapsto (x(\theta_1, \theta_2, \theta_3), y(\theta_1, \theta_2, \theta_3), z(\theta_1, \theta_2, \theta_3))$
- Calcul de la matrice jacobienne de f , Jf : indépendante de θ_1
 \Rightarrow les singularités de f sont indépendantes de θ_1
- On convertit f en $F = (\rho(\theta_2, \theta_3), z(\theta_2, \theta_3))$ en posant :
 $\rho(\theta_2, \theta_3) = x(0, \theta_2, \theta_3)^2 + y(0, \theta_2, \theta_3)^2$; $z(\theta_2, \theta_3) = z(0, \theta_2, \theta_3)$
- x cusp $\Leftrightarrow x$ racine triple de F ($\Rightarrow \det(JF(x)) = 0$)
- $\{x, y\}$ node $\Leftrightarrow \det(JF(x)) = \det(JF(y)) = 0$ et $F(x) = F(y)$

Une 1^{ère} Classification de robots 3R orthogonaux

- Manipulateurs 3R orthogonaux avec $r_3 = 0$ ($\beta_2 = \beta_3 = 0$)
- Expression de la fonction cinématique du robot,
 $f : (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mapsto (x(\theta_1, \theta_2, \theta_3), y(\theta_1, \theta_2, \theta_3), z(\theta_1, \theta_2, \theta_3))$
- Calcul de la matrice jacobienne de f , Jf : indépendante de θ_1
 \Rightarrow les singularités de f sont indépendantes de θ_1
- On convertit f en $F = (\rho(\theta_2, \theta_3), z(\theta_2, \theta_3))$ en posant :
 $\rho(\theta_2, \theta_3) = x(0, \theta_2, \theta_3)^2 + y(0, \theta_2, \theta_3)^2$; $z(\theta_2, \theta_3) = z(0, \theta_2, \theta_3)$
- x cusp $\Leftrightarrow x$ racine triple de F ($\Rightarrow \det(JF(x)) = 0$)
- $\{x, y\}$ node $\Leftrightarrow \det(JF(x)) = \det(JF(y)) = 0$ et $F(x) = F(y)$
- Robots classifiés selon leur nombre de *cusps* et de *nodes*.
Présence d'un Cusp \Rightarrow possible changement de posture du robot sans traverser de singularité.

- 1 Contexte robotique : Classification de robots
- 2 Analyse par intervalles
 - Définitions
 - Algorithme d'inversion SIVIA
 - Algorithme de Newton par intervalles
- 3 Cadre mathématique
- 4 Implémentation
- 5 Conclusions – Perspectives

Définition

Boite : vecteur d'intervalles

$\mathbb{I}E$: Ensemble des boites dans E

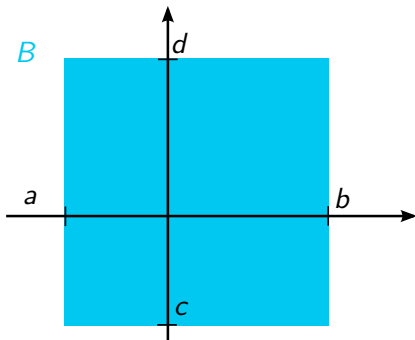


Figure: Une boite $B = ([a, b], [c, d])$ dans \mathbb{R}^2

Définition

$[f] : \mathbb{I}E \rightarrow \mathbb{I}F$ est une fonction d'inclusion pour $f : E \rightarrow F$ si :

$$\forall B \in \mathbb{I}E, f(B) \subseteq [f](B)$$

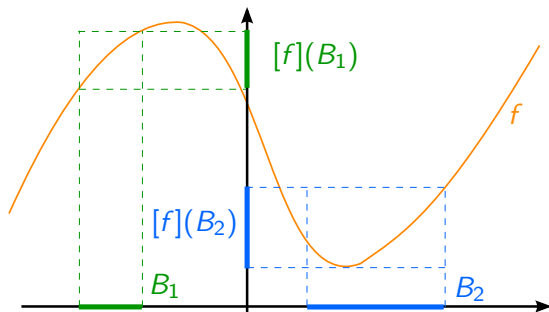


Figure: Fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ minimale

Principe

Analyse par intervalles substitue :

- Des boites les encadrant aux vecteurs de valeurs
- Des fonctions d'inclusion aux fonctions

Utilité : Garantir des encadrements de valeurs, même pour des valeurs non représentables. Exemple : Calcul par ordinateur.

SIVIA : inversion, par intervalles, d'applications

Entrée : une fonction $f : D \rightarrow E$, une boîte $T \subseteq E$

Sortie : 3 listes de boîtes : I , O et U , telles que
 $U\{B \in I\} \subseteq f^{-1}(T) \subseteq U\{B \in (I \cup U)\}$

Algorithme :

Diviser D , en boîtes B , jusqu'à précision ϵ

Construire listes :

$$I = \{B \text{ construits} \mid [f](B) \subseteq T\}$$

$$O = \{B \text{ construits} \mid [f](B) \cap T = \emptyset\}$$

$$U = \{B \text{ construits} \mid [f](B) \cap T \neq \emptyset \text{ et } [f](B) \not\subseteq T\}$$

SIVIA avec $T = \{0\}$: $I \cup U$ encadre les racines de f .

Algorithme de Newton par intervalles

Objectif : Extraire $(B_i)_{i \in I} \supset \{x | f(x) = 0\}$ où $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
Si les racines sont isolées, chaque boîte B_i en encadre une seule.

Définition (Opérateur de Newton Intervalle N_f)

$N_f : \mathbb{R}^n \ni B \mapsto x - [(Jf)^{-1}(B)] \times f(x)$ où $x \in B$ est un élément quelconque de B et $[(Jf)^{-1}(B)]$ encadre $\{(Jf)^{-1}(x) | x \in B\}$

Proposition

- 1 $(x \in B \text{ et } f(x) = 0) \Rightarrow x \in N_f(B)$
- 2 $N_f(B) \subseteq B \Rightarrow (\exists ! x \in B | f(x) = 0)$

Corollaire

- 1 $N_f(B) \cap B = \emptyset \Rightarrow (\nexists x \in B | f(x) = 0)$
- 2 $N_f(B) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (\text{Si } \exists x \in B | f(x) = 0 \text{ Alors } x \in N_f(B) \cap B)$

Plan : Algorithme de Newton par intervalles

- † *Entrées* : Liste de boites $L = (B_j)_{j \in J}$; une précision $\epsilon > 0$
- † *Sorties* : 2 listes de boites R et U

Plan : Algorithme de Newton par intervalles

- † *Entrées* : Liste de boites $L = (B_j)_{j \in J}$; une précision $\epsilon > 0$
- † *Sorties* : 2 listes de boites R et U
- † *Algorithme* : Tant que $L \neq \emptyset$:

Plan : Algorithme de Newton par intervalles

- † *Entrées* : Liste de boites $L = (B_j)_{j \in J}$; une précision $\epsilon > 0$
- † *Sorties* : 2 listes de boites R et U
- † *Algorithme* : Tant que $L \neq \emptyset$:
 - Calcul de $N_f(B)$, $B \in L$ et retrait de B à L

Plan : Algorithme de Newton par intervalles

- † *Entrées* : Liste de boites $L = (B_j)_{j \in J}$; une précision $\epsilon > 0$
- † *Sorties* : 2 listes de boites R et U
- † *Algorithme* : Tant que $L \neq \emptyset$:
 - Calcul de $N_f(B)$, $B \in L$ et retrait de B à L
 - Si $N_f(B) \subset B$ ajout de $N_f(B)$ à R

Plan : Algorithme de Newton par intervalles

† *Entrées* : Liste de boites $L = (B_j)_{j \in J}$; une précision $\epsilon > 0$

† *Sorties* : 2 listes de boites R et U

† *Algorithme* : Tant que $L \neq \emptyset$:

- Calcul de $N_f(B)$, $B \in L$ et retrait de B à L
- Si $N_f(B) \subset B$ ajout de $N_f(B)$ à R
- Sinon, si $N_f(B) \cap B \neq \emptyset$

- Si (taille de $B < \epsilon$) ajouter B à U

- Sinon :

Construire $B' = N_f(B) \cap B$ et diviser B' en B_1, B_2

Ajouter B_1 et B_2 à L

- 1 Contexte robotique : Classification de robots
- 2 Analyse par intervalles
- 3 Cadre mathématique
 - Applications et points singuliers génériques
 - Applications génériques de $X \subseteq \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^2
 - Caractériser les cusps et les nodes
- 4 Implémentation
- 5 Conclusions – Perspectives

Applications et points singuliers *génériques*

Objectif : Définir une classe d'applications et de points singuliers à rechercher qui soit assez générale, dans l'espace des fonctions C^∞ .

Définition

Soit $G \subseteq C^\infty(X, Y)$. G est un ensemble d'applications générique si G contient un sous ensemble, intersection dénombrable d'ouverts denses (=résiduel), dans $C^\infty(X, Y)$, pour la topologie C^∞ de Whitney.

Applications génériques de $C^\infty(X \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ considérées

- $S = \{p \in X \mid \det(Jf_p) = 0\}$, est une courbe
- S contient seulement des *points plis* (de multiplicité 2 pour f) et un nombre discret de *points cusps* (de multiplicité 3) isolés.
- 3 points singuliers différents n'ont pas la même image par f .
- 2 points singuliers différents ayant la même image par f sont des points plis et leurs images s'intersectent sans tangence.

Applications génériques de $C^\infty(X \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ considérées

- $S = \{p \in X \mid \det(Jf_p) = 0\}$, est une courbe
- S contient seulement des *points plis* (de multiplicité 2 pour f) et un nombre discret de *points cusps* (de multiplicité 3) isolés.
- 3 points singuliers différents n'ont pas la même image par f .
- 2 points singuliers différents ayant la même image par f sont des points plis et leurs images s'intersectent sans tangence.
- le bord de X , δX doit vérifier, par f :
 - † 3 points différents de $S \cup \delta X$ n'ont pas la même image.
 - † les images égales, par f , de 2 points différents de δX s'intersectent sans tangence.
 - † S n'intersecte pas tangentiellement δX et S intersecte δX uniquement en des point plis de S .

Applications génériques de $X \in \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^2

f différentiable et δX différentiable(s)

\Rightarrow Les topologies de $S \cup \delta X$ et de $f(S) \cup f(\delta X)$ sont invariantes par difféomorphismes sur l'espace source et/ou image.

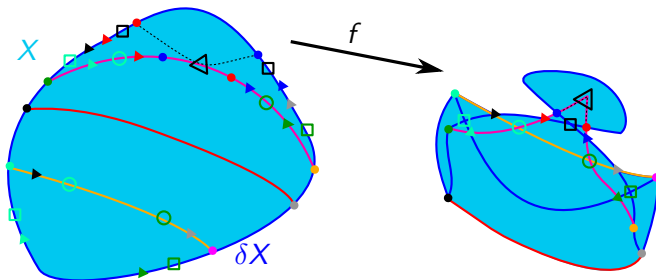


Figure: Exemple de topologies de $S \cup \delta X \xrightarrow{f} f(S) \cup f(\delta X)$

Fonctions cinématiques *génériques*

Les points singuliers d'une fonction cinématique *générique* ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) sont, exhaustivement, dans l'espace articulaire :

- des points cusps (isolés)
- des points plis simples
- des paires de points plis avec la même image (des nodes)

Remarque (Cas des robots 3R orthogonaux étudiés)

$$f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \leftrightarrow f_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, 2\pi\text{-périodique}$$

Soit la fonction cinématique $f = (\rho_1, \rho_2) \mapsto (f_1(\rho_1, \rho_2), f_2(\rho_1, \rho_2))$

Théorème

Les points cusp et les paires de points nodes sont racines de systèmes carrés d'équations.

Proposition

$C = (\rho_1, \rho_2)$ est un point cusp \Leftrightarrow

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \rho_1}(C) \cdot \left(-\frac{\partial \det(Jf)}{\partial \rho_2}(C) \right) + \frac{\partial f_1}{\partial \rho_2}(C) \cdot \frac{\partial \det(Jf)}{\partial \rho_1}(C) = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho_1}(C) \cdot \left(-\frac{\partial \det(Jf)}{\partial \rho_2}(C) \right) + \frac{\partial f_2}{\partial \rho_2}(C) \cdot \frac{\partial \det(Jf)}{\partial \rho_1}(C) = 0 \end{cases}$$

Proposition

$$\{\rho, \rho'\} \text{ est un node} \Leftrightarrow \rho \neq \rho' \text{ et } \begin{cases} f_1(\rho) = f_1(\rho') \\ f_2(\rho) = f_2(\rho') \\ \det(Jf(\rho)) = 0 \\ \det(Jf(\rho')) = 0 \end{cases}$$

Remarque

Sur la diagonale ($\rho = \rho'$) le système précédent devient l'équation :

$$\det(Jf(\rho)) = 0$$

Trouver les nodes \Leftrightarrow trouver les racines en dehors de la diagonale.

Algorithme de Recherche garantie des cusps et nodes

Recherche des cusp et nodes : méthode de Newton par intervalles

- *Entrée* : une boite de recherche (dans l'espace articulaire)
- *Sortie* : 4 listes de boites : (C, UC, N, UN) :
 - C : encadrements de points cusps
 - UC : boites contenant peut être un cusp
 - N : encadrements de nodes (paires de points)
 - UN : paires de boites contenant peut être un node

L'algorithme se décompose en 3 phases :

- 1 Recherche des points cusps (espace articulaire)
- 2 Construction d'un recouvrement R de la courbe singulière (espace articulaire) tel que f injective sur boites engendrés par deux boites non disjointes de R .
- 3 Recherche des nodes, en parcourant R .

La 2^{ème} étape permet de pré-gérer le voisinage de la diagonale pour simplifier la 3^{ème} étape.

La 2^{ème} étape utilise un test spécifique d'injectivité près des cusps.

Performances :

- † Cusps rapidement isolés.
- † Construction relativement rapide d'un recouvrement, injectif, de la courbe singulière (dans l'espace articulaire)
- † Détection rapide des nodes
- † Vérification longue de l'absence de node près des cusps

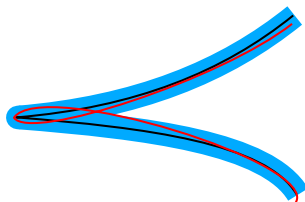


Figure: Présence incertaine de node près d'un cusp (espace image)

Analyse par intervalles et robotique :

Usuellement : Utilisée pour isoler lieux singuliers des robots :
permet de définir des sous espaces sans singularités

Approche complémentaire : Déterminer la topologie des lieux
singuliers des robots, caractéristiques de leurs comportements.

Propriétés de l'approche :

Légère incertitude autorisée sur les paramètres géométriques.

Applicable à des robots généraux complexes : le temps de
calcul et la précision peuvent augmenter toutefois.

L'aspect garanti des résultats

Utiliser les méthodes propagation de contraintes

Vérifier l'absence de node nécessite beaucoup de calculs et de découpages, pour les boites près des cusps.

La propagation de contrainte pourrait permettre de :

- Compenser le pessimisme sur l'évaluation de l'opérateur de Newton.
- Vérifier l'injectivité de la courbe singulière sur un plus grand voisinage des cusps.

Pistes de recherche

Travaux envisagés

- Prise en compte limites sur l'espace articulaire \Rightarrow
Classification utilisant les "bords" de l'espace articulaire.
- Gérer des robots parallèles en rendant l'algorithme capable de
traiter les relations sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (en considérant les mêmes
difféomorphismes pour définir l'équivalence)

Espace articulaire accessible

Encadrer postures sans auto collisions (modèle volumique simple)

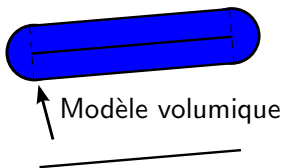


Figure: Modèle volumique simple utilisé

Modèle : Segment \mapsto Points distant, au plus, de $r \geq 0$ du segment
Distance entre 2 segment \leq somme des 2 rayons \Leftrightarrow Collision entre les 2 pièces du robot.

Procédure détectant les auto-collisions déjà implémentée pour robots 3R orthogonaux.

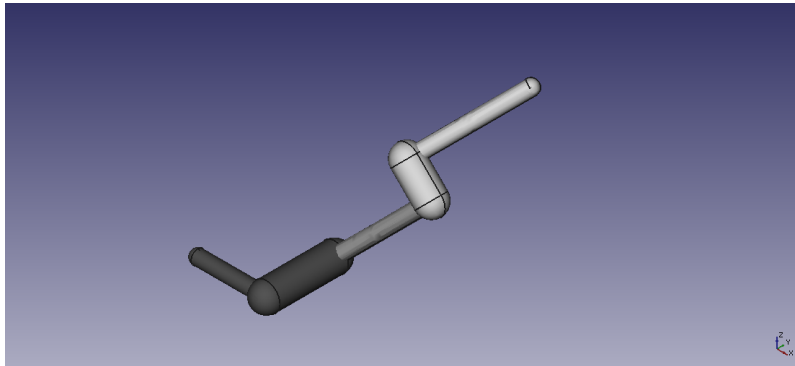


Figure: vue isométrique du modèle appliqué à un robot 3R orthogonal

Extension aux relations sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

On souhaite étendre l'étude réalisée aux robots parallèles décrits par des équations $F(\rho, p) = 0$ en plus des équations $p = f(\rho)$.

\Rightarrow Etude de systèmes $F_1(\rho, p) = 0 = F_2(\rho, p)$

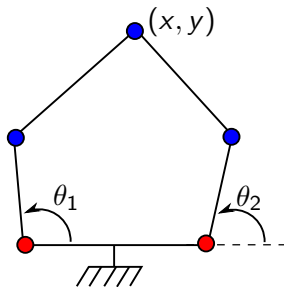


Figure: Robot 5 barres : exemple de robot plan parallèle

Procédure similaire aux robots série

$$\text{On pose } JF_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \rho_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \rho_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} \end{pmatrix} \text{ et } JF_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \rho_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \rho_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} \end{pmatrix}$$

Les difféomorphismes sur A ou T sont compatibles avec F (ce sont les composantes sur A et T d'un difféomorphisme sur $A \times T$)

Définition de généricité sur les relations

\Rightarrow Définition et recherche des points singuliers spécifiques parmi $\{(\rho, p) \mid \det(JF_A(\rho, p)) = 0\}$ et $\{(\rho, p) \mid \det(JF_T(\rho, p)) = 0\}$.